Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Références : Grifone, Rombaldi, Caldero (Nouvelle… pour DEV 2)

I - Généralités
1) Formes bilinéaires
2) Formes quadratiques

II - Réduction des formes quadratiques
1) Noyau et cône isotrope
2) Bases q-orthogonales et réduction de Gauss

III - Classification des formes quadratiques
1) Classification sur $\mathbb{C}$
2) Classification sur $\mathbb{R}$
3) Classification sur un corps fini

IV - Géométrie dans (E, q)
1) Sous-espaces isotropes
2) Le cas euclidien
3) Groupe orthogonal associé à une forme quadratique

DEV 1 : Critère de Sylvester

DEV 2 : Loi de réciprocité quadratique

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Soit K un corps. A partir de I.2, on suppose $car(K) \neq 2$.
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Généralités

1) Formes bilinéaires [GRI] [ROM]

DEF 1 : Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to K$ est une application linéaire dans les deux arguments. Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n} = \mathcal{B}$ est une base de E, on note $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. φ est symétrique lorsque $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

PROP 2 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $x, y \in E$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y)$. On a $\varphi(x,y) = {}^tXMY$ où $M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

PROP 3 : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $P = Pass_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$, $M' = {}^tPMP$ où $M = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $M' = Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. Deux matrices vérifiant cette relation sont dites congruentes : elles représentent une même forme bilinéaire dans deux bases. On a alors $rg(M') = rg(M)$.

DEF 4 : On appelle rang de φ le rang de sa matrice dans une base de E.

[Pdl] **DEF 5** : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Le discriminant de φ est le déterminant de $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$. On le note $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

PROP 6 : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $P = Pass_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ on a $\Delta_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \det(P)^2 \Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$

DEF 7 : On dit que φ est non dégénérée lorsque $rg(\varphi) = n$.

PROP 8 : φ est non dégénérée si et seulement si $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$ pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E.

EX 9 : Tout produit scalaire est non dégénérée

EX 10 : La forme de Lorentz : $(x,y) \in (\mathbb{R}^4)^2 \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$ est non dégénérée.

THM 11 : L'application
$$u : \mathcal{L}_2(E) \to \mathcal{L}(E, E^*), \quad \varphi \mapsto u_\varphi : \begin{array}{l} E \to E^* \\ y \mapsto \begin{array}{l} E \to K \\ x \mapsto \varphi(x,y) \end{array} \end{array}$$
est un isomorphisme. On a de plus
De plus $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(u_\varphi)$.

2) Formes quadratiques [GRI] $car(K) \neq 2$.

DEF 12 : Une forme quadratique sur E est une application $q : E \to K$ qui est un polynôme homogène de degré 2 en les composantes x_i de x dans une base $\mathcal{B}$ de E.

EX 13 : $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$

REM 14 : La définition ne dépend pas du choix de la base.

PROP 15 :
- Soit $\varphi : E \times E \to K$ bilinéaire symétrique. Alors $q : x \in E \mapsto \varphi(x,x)$ est une forme quadratique.
- Soit $q : E \to K$ une forme quadratique. Il existe une unique $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$, $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$. On a $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

DEF 16 : φ s'appelle la forme polaire de q.

EX 17 : Si φ est un produit scalaire, $q = \|\cdot\|^2$

DEF 18 : Le rang et le discriminant de q sont ceux de sa forme polaire φ. Tous les qualificatifs (non dégénérée) appliqués à q ~~sont~~ ceux appliqués à φ.

II - Réduction des formes quadratiques

1) Noyau et cône isotrope [GRI] [ROM]

DEF 19 : Deux $x, y \in E$ sont dits φ-orthogonaux lorsque $\varphi(x,y) = 0$. Pour tout $X \subset E$, $X \neq \emptyset$, on définit l'orthogonal de X par $X^\perp = \{y \in E \,/\, \forall x \in X, \varphi(x,y) = 0\}$. On a $X^\perp = Vect(X)^\perp$

DEF 20 : On définit le noyau de φ (ou de q) par :
$N(\varphi) = \{x \in E \,/\, \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\} = E^\perp = \ker(u_\varphi)$

PROP 21 : φ est non dégénérée $\Leftrightarrow N(\varphi) = \{0\}$

LEMME 22 : On a pour F sev de E, $F^\perp = (u_\varphi(F))^\circ$ où $\circ$ est l'orthogonal au sens de la dualité.

PROP 23 : Soit F un sev de E. On a :
- $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) + \dim(F \cap N(\varphi))$
- $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

Si φ est non dégénérée, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

DEF 24 : On appelle cône isotrope de q l'ensemble $C(q) = \{x \in E \,/\, q(x) = 0\}$.
On dit que q est définie lorsque $C(q) = \{0\}$.

EX 25: • $q(x)=x_1^2-x_2^2$, $C(q)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 / x_1=\pm x_2\}$ ANNEXE

• $q(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$, $C(q)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_3=\pm\sqrt{x_1^2+x_2^2}\}$

PROP 26: $N(q) \subsetneq C(q)$ et $C(q)$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E, contrairement à $N(q)$.

PROP 27: $\dim(E)=\dim(N(q))+rg(q)$.

2) Bases q-orthogonales et méthode de Gauss [GRi]

DEF 28: Une base $\mathcal{B}$ de E est dite q-orthogonale lorsque : $\forall i\neq j\in[\![1;n]\!]$, $\varphi(e_i,e_j)=0$

REM 29: $\mathcal{B}$ est q-orthogonale si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale si et seulement si : $\forall x\in E$, $q(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$

On obtient alors facilement le rang de q.

THM 30: Il existe au moins une base q-orthogonale de E.

THM 31: Si on écrit $q=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_i^2$ où les $l_i\in E^*$ sont linéairement indépendantes, alors la base antéduale de $(l_1,\dots,l_n)$ est q-orthogonale. De plus, $rg(q)=\#\{i\in[\![1;n]\!], \lambda_i\neq 0\}$ et $N(q)=\bigcap_{\substack{i=1\\ \lambda_i\neq 0}}^{n}\ker(l_i)$.

MÉTHODE 32 (Gauss): C'est une méthode algorithmique qui permet d'obtenir une décomposition de q comme dans le THM 31. Ce théorème nous montre l'utilité d'obtenir une telle décomposition. Illustrons la méthode par des exemples :

1) Tant qu'il y a des carrés $q: x\in\mathbb{R}^3\mapsto x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

• On regroupe : $q(x)=x_1^2+2x_1x_2+5x_3^2-4x_2x_3+2x_2^2$

• On met sous forme de carré : $q(x)=(x_1+x_2)^2+x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3$

• On recommence tant qu'il y a des carrés :

$q(x)=(x_1+x_2)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2$

2) Cas de termes "rectangles" $q(x)=5x_1x_2+6x_1x_3+3x_2x_3$

• On choisit un terme rectangle : $5x_1x_2$

• On calcule les dérivées partielles :

$q'_{x_1}=5x_2+6x_3$; $q'_{x_2}=5x_1+3x_3$

• On écrit $q(x)=\frac{1}{5}q'_{x_i}q'_{x_j}+$ termes correctifs :

$q(x)=\frac{1}{5}\underbrace{(5x_2+6x_3)}_{\varphi_1}\underbrace{(5x_1+3x_3)}_{\varphi_2}-\frac{18}{5}x_3^2$.

• On écrit $\varphi_1\varphi_2=\frac{1}{4}[(\varphi_1+\varphi_2)^2-(\varphi_1-\varphi_2)^2]$

$q(x)=\frac{1}{20}(5x_1+5x_2+9x_3)^2-\frac{1}{20}(5x_1+5x_2-3x_3)^2-\frac{18}{5}x_3^2$

PROP 33: Les formes linéaires obtenues sont linéairement indépendantes.

III - Classification des formes quadratiques

DEF 34: Deux formes quadratiques $q,q':E\to K$ sont dites équivalentes lorsqu'il existe $u\in GL(E)$ tel que $\forall x\in E$, $q'(x)=q(u^{-1}(x))$.

PROP 35: Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si leurs matrices sont congruentes.

1) Classification sur $\mathbb{C}$ $K=\mathbb{C}$ [GRi]

THM 36: Soit $q:E\to K$. Il existe une base $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que si $x=x_1+\dots+x_n$, $q(x)=x_1^2+\dots+x_r^2$, $r=rg(q)$

c'est-à-dire $Mat_{\mathcal{B}}(q)=\begin{pmatrix}1 & & & & (0)\\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$

COR 37: Deux formes quadratiques (matrices symétriques) sont équivalentes (congruentes) si et seulement si elles ont même rang.

2) Classification sur $\mathbb{R}$ $K=\mathbb{R}$ [GRi][Rai]

DEF 38: Soit $q:E\to K$, on dit que q est (définie) positive lorsque $\forall x\in E$, $q(x)\geq 0$ ($q(x)>0$).

DEF 39: On appelle signature de q le couple (s,t) suivant :

$s=\max_{\substack{F \text{ sev de } E\\ q_{|F}>0}}(\dim(F))$ et $t=\max_{\substack{F \text{ sev de } E\\ q_{|F}<0}}(\dim(F))$.

THM 40: (Inertie de Sylvester) Soit $q:E\to K$ de signature (s,t). Il existe une base $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que si $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, $q(x)=x_1^2+\dots+x_s^2-x_{s+1}^2-\dots-x_{s+t}^2$

$Mat_{\mathcal{B}}(q)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & & & & & (0)\\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & -1 & \\ & & & & & & (0)\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\updownarrow s\\ \updownarrow t\end{array}$

COR 41 : Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature.

COR 42 : Si $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i^2$ avec $l_i \in E^*$ linéairement indépendantes on a $s = \#\{i \in [\![1;n]\!], \lambda_i > 0\}$ et $t = \#\{i \in [\![1;n]\!], \lambda_i < 0\}$. De plus, $rg(q) = s+t$.

DEV 1

PROP 43 : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$. On a $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$.

THM 44 : (Sylvester) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

3) Classification sur un corps fini. $K = \mathbb{F}_q$ [Rom]

LEMME 45 : L'équation $ax^2 + by^2 = c$ a des solutions dans $\mathbb{F}_q$ pour $a, b \in \mathbb{F}_q^*$, $c \in \mathbb{F}_q$.

THM 46 : Soit $q : E \to K$, $rg(q) = r$. Il existe une base de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} I_{r-1} & & (0) \\ (0) & \delta & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ où δ est la classe de $\Delta_{\mathcal{B}}(q)$ modulo les carrés.

DEF 47 : On définit le symbole de Legendre par :
$$\left(\frac{a}{q}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_q^* \\ -1 \text{ si } a \text{ n'est pas un carré dans } \mathbb{F}_q^* \\ 0 \text{ si } a = 0. \end{cases}$$

DEV 2

PROP 48 : $\#\{x \in \mathbb{F}_q \mid ax^2 = 1\} = 1 + \left(\frac{a}{q}\right)$ $(a \in \mathbb{F}_q^*)$

THM 49 (Loi de réciprocité quadratique) Soient p, q premiers impairs distincts. Alors : $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}}$

IV - Géométrie dans (E, q) On fixe q et φ.

1) Sous-espaces isotropes [GRi] [Rom]

PROP 50 : Si $X, Y \subset E$, $\{0\}^\perp = E$, $X \subset (X^\perp)^\perp$ et $X \subset Y$ implique $Y^\perp \subset X^\perp$

REM 51. On n'a pas toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$!

DEF 52 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est isotrope lorsque $F \cap F^\perp \neq \{0\}$. On dit que F est totalement isotrope lorsque $F \subset F^\perp$.

REM 53 : Si $C(q) \neq \{0\}$, il existe des sous-espaces isotropes : Si $v \in C(q), v \neq 0$, $Vect(v)$ est isotrope.

THM 54 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors : $F \cap F^\perp = \{0\} \iff q_{|F \times F}$ est non dégénérée $\iff E = F \oplus F^\perp$.

2) Le cas euclidien On suppose $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ euclidien.

DEF 55. Pour $u \in \mathcal{S}(E)$, on pose $q_u : x \in E \mapsto \langle u(x) | x \rangle$. Alors q_u est une forme quadratique sur E.

PROP 56 : L'application $\phi : \mathcal{S}(E) \to Q(E)$, $u \mapsto q_u$ est un isomorphisme. De plus, si $\mathcal{B}$ est une BON de E, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(q_u)$.

♡ + un peu [GRi]

THM 57 : Soit $q \in Q(E)$ et $u \in \mathcal{S}(E)$ tel que $q = q_u$. Alors q est de signature (s, t) où s (resp. t) est le nombre de valeurs propres de u positives (resp. négatives).

THM 58 : Soit $q \in Q(E)$. Il existe une base orthonormée de E (pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$) orthogonale pour q.

3) Groupe orthogonal associé à q [GRi] On suppose q non dégénérée

PROP 59 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $\varphi(u(x), y) = \varphi(x, u^*(y))$

PROP 60 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. LASSE :
(1) $\forall x \in E$, $q(u(x)) = q(x)$ (2) $\forall x, y \in E$, $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$
(3) $u^* \circ u = Id_E$. En particulier, u est bijectif.

DEF 61 : Un tel u est dit orthogonal. On note $O(q)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux pour q.

PROP 62 : $O(q)$ est un groupe pour la composition.

PROP 63 : Si $f \in O(q)$, alors $\det(f) \in \{-1; 1\}$. L'ensemble $SO(q) = \{f \in O(q) \mid \det(f) = 1\}$ est un groupe appelé groupe spécial orthogonal.

PROP 64 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $S = Mat_{\mathcal{B}}(q)$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. $u \in O(q) \iff {}^tASA = S$.

ANNEXE : Les deux cônes isotropes de l'EX 25